INSTITUT DE STATISTIQUE de l'Université Pierre et Marie Curie

Concours d'entrée
6 et 7 juin 1995

Epreuve de mathématiques III
Durée 3 heures

Dans tout le problème, f désigne la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x dt.$$

ln désigne le logarithme népérien.

Préliminaire : établir la relation : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$.

I

1- Quel est le domaine de définition de f ?

2- Exprimer $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$.

3- Quelle est la limite de f à droite en -1 ?

4- Quelle est la limite de f en $+\infty$?

5- Montrer que f est dérivable sur son domaine de définition et donner une expression de f' sous forme d'intégrale.
(On introduira la suite des fonctions $f_n(x) = \int_{1/n}^{\pi/2} (\sin t)^x dt$.)

6- On pose $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt$, $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2t) dt$.

a) Montrer que I et J ont un sens.

b) Exprimer J en fonction de I de deux manières différentes et en déduire la valeur de I.

7- a) Calculer $f'(0)$ et $f'(1)$.

b) Tracer avec soin le graphe de f. On prendra pour unité sur les axes 2 cm et on adoptera les valeurs approchées : $\pi \simeq 3,2$, $\ln 2 \simeq 0,7$.
On tracera les tangentes aux points d'abscisse 0 et 1.

II

On se propose de préciser le comportement de f en -1 et en $+\infty$.

1- Soit $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Calculer $\lim_{x \to -1_+} \int_a^{\pi/2} (\sin t)^x dt$.

2- En déduire un équivalent simple de f en -1_+.

3- A l'aide d'une intégration par partie, établir la relation :

$$\forall t > -1, \quad (t+2)f(t+2) = (t+1)f(t).$$

4- En déduire que la fonction $g(t) = (t+1)f(t+1)f(t)$ est périodique, et en donner une période.

5- Démontrer qu'il existe m et M réels > 0 tels que :

$$\forall t \geq 1, \quad \frac{m}{\sqrt{t}} \leq f(t) \leq \frac{M}{\sqrt{t}}.$$

6- Exprimer $f(2p)$ et $f(2p+1)$ pour tout entier p et le produit $(2p+1)f(2p+1)f(2p)$.

7- Démontrer que g a une limite en $+\infty$. En déduire un équivalent simple de f en $+\infty$.

III

Donner une valeur approchée à $1/10$ près de $f(+1/2)$. (On donnera le détail des calculs.)